M. Ancona 12/11/2021

Tight pour l'espace projectif

Bochnak - Kucharz : B courbe alg. réelle $f : B(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^d(\mathbb{R})$ C^∞

+ conditions de jets

$\Rightarrow \exists\ g_n : B \to \mathbb{P}^d$ algebrique

t.q. $g_n(\mathbb{R}) \to f$ uniformement

+ egalité jets

idee preuve : $\mathbb{R}^{d+1}$ + theoreme Weierstrass (*)

Thm (Runge + G-equivariant + jets)

B courbe algebr. réelle

$B(\mathbb{R}) \subset \underset{\text{cpt}}{K} \subset \underset{\text{ouvert}}{\Omega}$ G-stables

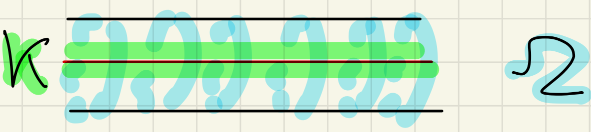
$u : \Omega \to \mathbb{C}$ holo. G-stable

+ jets $b_1 \ldots b_m \in K$ $r \geq 0$

Alors $\exists$

$R(B) \ni f_n$ fonctions rationelles G-equivariantes sans poles sur K t.q. $f_n|_K \to u$ + jets subi

B



Pf: Runge

on peut se ramener à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \supset \Omega \supset K$

$u : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe

faut trouver des fonctions rationelles qui approchent u.

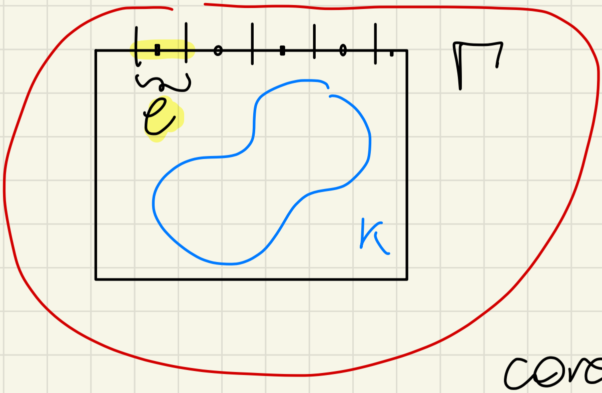
On va utiliser Formule Cauchy : Γ t.q. $K \subset \mathring{\Gamma}$ et $\Gamma \subset \Omega$

lacet linéaire par morceaux

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{u(w)}{w-z}\, dz$$

pas des poles sur K

approx par des sommes de Riemann



Ω On appoche l'integral par des sommes de Riemann qui coverge ⟶ intégral

On finit avec sommes des functions rationelles avec poles hors K.

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{w_i \in \Gamma \\ i \in I(n)}} \frac{u(w_i)}{z - w_i} \cdot \frac{1}{e}$$

Convergence uniforme? Quand on va se restrandre au compact on peut trouver un ε qui marche pour tout.

- G-equiv. $\frac{x+\sigma(x)}{2}$ et converge encore

JETS:

- h funct. rationelle avec mere jets que u sur b_i (existence Riemann-Roch)

g qui s'annulle à l'ordre exac. r sur b_i

$\tilde{u} = \dfrac{u-h}{g}$ $\longrightarrow$ + pas zeros sur Ω

on applique Runge

$\Rightarrow \tilde{f}_n|_K \xrightarrow{\text{unif}} \tilde{u}|_K$

$\tilde{f}_n g + h|_K \longrightarrow u|_K$ et par construction même r-jets sur ω

Idée (B-K) : $(*)$

$u : B(\mathbb{R}) \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{P}^d(\mathbb{R})$

$x \longmapsto [u_0(x) : \dots : u_d(x)]$

coord homog. $\overset{!}{=} [u^* y_0 : \dots : u^* y_d]$

(sections de $\mathcal{O}(1) \to \mathbb{P}^d$) $\mathcal{O}(1)$

Soit $y_0 \dots y_d$

On a le fibré $\underbrace{u^*\mathcal{O}(1)}$ qui est C^∞ + $d+1$ sections

on veut le modifier pour le rendre algébrique

Pertubation du $u^*\mathcal{O}(1)$ pour le rendre algébrique, on aura

$\xrightarrow[\text{unif.}]{\text{sur } K} (f_{1,i}, \dots, f_{N,i})$ + même jets

On pousse en avant par $\tilde{g}$

$\xi_{i,n} = g(f_{1,i,n}, \dots, f_{N,i,n})$ définit une suite des sections rationnelles de $\mathcal{L}$.

$$\xi_{i,n} : B(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^d(\mathbb{C})$$
$$x \longmapsto [\xi_{1,n}(x) : \dots : \xi_{d,n}(x)]$$
$$\hookrightarrow [u^* y_1(x) : \dots : u^* y_d(x)]$$

qui s'étende partout pour le valuative properness criterion.

Par construction $f_n|_K \longrightarrow u|_K$ uniform et $j^r_{b_i} f_n = j^r_{b_i} u$.

Application : variétés stablement rationnelles vérifient tight

Cor : Soit $X, X' / F = \mathbb{R}(B)$ t.q. X et X' sont stablement birat., i.e. $\exists\ d, d' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tq.
$X \times \mathbb{P}^d_F \simeq X' \times \mathbb{P}^{d'}_F$

Alors X vérifie tight iff X' vérifie tight.

Th : Z stein du 1, G-équivar.
$$\mathrm{Pic}_G(Z) \xrightarrow[\cong]{cl_{\mathbb{R}}} H^1(Z^G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

• Fait : $\mathrm{Pic}_G(Z) \simeq H^1_G(Z, \mathcal{O}_Z^*)$

$$0 \to \mathbb{Z}(1) \to \mathcal{O}_Z \to \mathcal{O}_Z^* \to 0$$
$$f \longmapsto \exp(2\pi i f)$$

$\sigma(b) = -b$
Faisceau constant + action

$\Delta \times$ l'avoir G-équivariant

$G = \langle \sigma \rangle$

Suite exacte longue en cohomol.

$$\mathrm{Pic}_G(Z) \xrightarrow{cl} H^1_G(Z, \mathcal{O}_Z^*) \xrightarrow{cl} H^2_G(Z, \mathbb{Z}(1))$$

restriction

$$Z^G \hookrightarrow Z \qquad H^2_G(Z, \mathbb{Z}(1)) \to H^2_G(Z^G, \mathbb{Z}(1))$$

$cl_{\mathbb{R}}$

$$\cong H^1(Z^G, \mathbb{Z}/2) \sim$$

"Künneth" à la main aussi

$$\cancel{H^1_G(Z,\mathcal{O}_Z)} \to H^1_G(Z,\mathcal{O}_Z^*) \to H^2_G(Z,\mathbb{Z}(1)) \to \cancel{H^2_G(Z,\mathcal{O}_Z)}$$

STEIN STEIN

- si la restriction est un isomorphisme on a gagné

$i : Z \setminus Z^G \longrightarrow Z$

$\mathbb{Z}(1)$ sur $Z \setminus Z^G$

$i_! \mathbb{Z}(1)$ sur Z (extension par 0)

$$0 \to i_! \mathbb{Z}(1) \to \mathbb{Z}(1) \to \mathbb{Z}(1)|_{Z^G} \to 0$$

suite exacte longue

$$H^2_G(Z^G, i_!\mathbb{Z}(1)) \to H^2_G(Z, \mathbb{Z}(1))$$

$$\to H^2_G(Z^G, \mathbb{Z}(1)) \to H^3(Z^G, i_!\mathbb{Z}(1))$$

arguments de dimensions + Stein

$H^*_G(X, \mathbb{Z})$ comment penser à ça

$H^*(X \times EG/G, \mathbb{Z})$ ← espace universelle simpl. connexe sur lequel G agit

ex. $H^2_G(Z^G, \mathbb{Z}(1))$

$\nparallel$

0

même si $Z^G = 1$ car l'action de G n'est pas triviale

$$H^q_G(Z, i_!\mathbb{Z}(1))$$

$$\overset{\wr\wr}{H^q(Z/G, j_!\tilde{\mathbb{Z}})}$$

si G a pt fixes sur X, comme EG contractible

$\wr\wr$ $H^*(X/G)$

($j : (Z \setminus Z^G)/G \hookrightarrow Z/G$

$\tilde{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}(1)/\langle\sigma\rangle$ (loc. const., fibré des orientation))

12

$$H^{BM}_{2-q}(Z/G\,;\,\mathbb{Z})$$

$q = 2, 3$ va être nulle